大气斜压波动的实验模拟与研究

尤飞宇

(南京大学大气科学学院,江苏省南京市栖霞区南京大学仙林校区 210023) 李亦萌

(南京大学大气科学学院,江苏省南京市栖霞区南京大学仙林校区 210023) 赖燕红

(南京大学大气科学学院,江苏省南京市栖霞区南京大学仙林校区 210023) 李丹阳

(南京大学大气科学学院,江苏省南京市栖霞区南京大学仙林校区 210023) 指导老师:宋金杰

(南京大学大气科学学院,江苏省南京市栖霞区南京大学仙林校区 210023)

摘 要 斜压波是中高纬度大气运动最显著的特征之一。近几年朱诺号探测器也拍 摄到木星大气波动资料。为了直观理解和探究这种大尺度大气波动,本文采用水槽 实验的方法,成功反演得到不同波动特征的斜压波。实验前,先论证了实验模型与 Eady 理论模型的相似性,并推导斜压波的理论特征。正式实验中,利用首创的墨水 激光法得到清晰波动图像,并将实验结果和理论结果比较分析。最后基于实验结论, 尝试回答一些关于木星大气波动的疑问。

关键词 斜压波;水槽实验;流体力学;大气科学;

引言

斜压波是一种常见的大气波动,也是影响中高纬度地区的最为重要的天气系统之一。这种围绕极地地区的大气长波也非地球所特有。近年来,科学家们在土星、木星等天体的极地 上空,都陆续观测到了不尽相同的大气波动与气旋活动。

然而,无论是这种大尺度的斜压波动,还是那些相隔甚远的天体大气,从感官上说似乎 都有一种遥不可及的距离感。是否有一种简明直观地了解斜压波动的方法呢?于是,我们把 目光投向了实验模拟。在流体力学领域,水槽实验的方法多次被前人应用于大气相关的理论 研究。我们也期望利用转盘水槽实验的方法,让随转盘转动的水"代替"随地球转动的大气, 具象化地反演和研究斜压波的波动特征,并针对最近一些关于木星近极大气的新发现给出我 们的一些猜想和解释。

1 斜压波简介

日常的天气变化与气旋的生成发展(Cyclogenesis)密不可分。在行星尺度上,气旋的生成 发展是大气的波动不稳定(Wave instability)所导致的。北半球温度南高北低,尤其在中纬度 地区温度经向梯度较大,根据热成风原理,基本气流的西风分量随着高度的增加而增大。这 说明中纬度大气具有很强的斜压性,因而具有一定的有效位能(Available Potential Energy)。 而有效位能恰恰就是大气中扰动发展的重要能量来源。这种产生于斜压大气中的长波不稳定,就是斜压不稳定(Baroclinic instability)。与之相伴随的大气波动,也被称为斜压波(Baroclinic wave)。[1]





图 2: 南极附近的大气波动,可大致看出五波分布

如图 3 所示,是利用两层模型对斜压不稳定原理的简单理解和解释。在斜压大气中,已 知高空中某一平直气流受正涡度扰动,产生了气旋性环流。根据位涡守恒原理,这一气旋性 环流会向下延伸,使低层大气出现温度平流。温度平流将引起低空位势涡度异常,反过来加 强高空既有的正涡度扰动。在一定条件下,低空与高空的位涡异常发生锁相,使气旋性环流 对初始扰动产生快速的放大效应,扰动得以迅速发展。[2]



图 3: 低空斜压区域所对应的高空受正涡度扰动,导致气旋生成发展的概念简图。 图 (a) 中高空涡度异常会使低空产生气旋性涡度。由涡度异常引起的低空环流如实线 箭头所示,位温如下边界的等位温线所示呈北冷南暖。因此低空将出现一水平位温平 流,温度平流会使得低空略微偏东的位置出现一暖异常。暖异常反过来又会引起一低 空气旋性环流,如图 (b) 中的空箭头所示。这一新产生的气旋性环流会加强原有的高 空涡度异常,并且导致扰动进一步发展放大。[2]

以上仅是从局地的角度来解释斜压不稳定。站在全球的角度,中高纬度的斜压大气均存 在明显的南北温度梯度(如图1所示),在一定条件下都有可能出现涡度扰动并引起气旋生 成发展。种种气旋性环流的发展变化最终使得大气原本的绕极纬向平直气流呈现出正负涡度 交替出现的波动形式(如图2所示)。

事实上,大气并不是地球所特有的属性,围绕极地地区的大气波动也并非地球"专利"。

比如科学家们依据卡西尼-惠更斯号探测器(Cassini-Huygens spacecraft)的土星观测资料,得到了土星两极地区的气旋涡动情况。最终呈现出来的图像令人震惊——围绕土星北极中心的大涡旋,周边的大气波动呈现为非常规则而稳定的正六边形。[3]



图 4: 土星北极地区大气图像。左图为夜间条件下观测到的正像,暗的地方表示云多; 右图为光度计反向图,亮的地方表示云多。由于极地地区同时存在昼夜现象,这两幅 图是由卡西尼-惠更斯号多次经过北极地区拍摄,利用九张拍摄到的图像依据一定规律 拼凑而成。[3]

自 2016 年 7 月 4 日朱诺号探测器(Juno spacecraft)进入木星轨道以来,科学家们得到了 大量关于木星的观测资料。由于朱诺号是首颗能够正面观测木星南北极的探测器,科学家们 首次看到了木星两极的气旋分布,最终得到的图像非常壮观。



图 5: 木星两极地区大气图像。上边两幅为可见光波段照片(亮的地方表示云多),下 面两幅为近红外波段照片(暗的地方表示云多);左边两幅为北极上空拍摄,右边两幅 为南极上空拍摄。^[4]同土星一样,这四张图像是由多张照片依据一定规律合并而成。

不同于土星极地大气的规则形状,木星的近南极地区为五个气旋围绕一个极地气旋,近 北极地区更是有八个气旋围绕一个极地气旋。如此数量的气旋分布尚未在其他天体上观测到。 随之而来的是更多的谜团与困惑尚待解决。为什么这些八边形/五边形分布的涡旋作为一个 整体的移动非常缓慢?为什么这些涡旋没有合并而能彼此独立存在?^[4]为什么南北极的涡 旋个数不一样等等疑问接踵而来。

由文献[4]可知,在这些涡旋的南北方向上有一定的温度差距,因而满足斜压性大气要 求,伴随着扰动不稳定发展也会存在斜压波。

基于数值模拟的方法,一些学者已经成功反演得到了与地球^[5]和土星^[6]大气波动相类似的流场图像。而对于我们来说,因为学识有限,对数值模拟不甚了解,加之这种方法本身并 非尽善尽美,因此,我们希望能通过另一种途径——转盘水槽实验的方法,来直观地模拟和 分析大气斜压波动,并尝试对木星大气气旋分布特征给出一些自己的猜想和解释。

2 实验介绍

水槽实验是流体力学研究的常用方法之一,也多次被用于斜压波的模拟研究。¹⁷水与空 气同为流体,而水还具备空气所不具有的可视化、易操作等优点,这使得水槽实验成为研究 大气的有效途径之一。

我们的水槽实验,是给水槽流体施加自转、内外温差等强迫,期望能在水槽中反演出与 大气斜压波动类似的流体波动。在实验中我们采用了热成像仪来观测温度分布,并自创了墨 水蓝激光法来反演流体运动,得到的图像效果很好(目前尚未在其他文献中见到相关方法, 关于这中方法的原理,我们也给出了自己的猜想与研究,详见附录[三])

2.1 实验仪器

实验仪器包括:转盘、水槽、冷水罐、激光、PIV 粒子、红墨水、热成像仪、冰块、水等。



图 6: 一些实验仪器图像。左上图为实验前的转盘,中间摆放着水槽,水槽内盛有温

热流体(水),中心处还摆放着冷水罐。右上图为实验中利用热成像仪拍摄到的流体温 度场分布。左下图为实验中激光照射下的水槽与流体。右下图为实验结束后随手拍到 的墨水蓝激光呈像下的流体扰动。

一些实验仪器的简单参数与用途如下:

激光: 445nm 2500mW 蓝光激光,用于照射粒子和染色剂来呈现流体流场图像。

热成像仪: 7.68 万像素 -40℃到 330℃ Seek Compact PRO,利用红外原理测量流体温度。

PIV 粒子:聚苯乙烯制,在蓝激光照射下可显示流体质点运动。(关于 PIV 粒子图像测速的原理,可见附录[二])

红墨水:与蓝激光配合可清晰显示出流线轨迹。(关于墨水激光呈像的原因分析,可见附录 [三])

冷水罐:铝制,内盛放冰水混合物,作为冷源。

水槽: 5mm 厚有机玻璃制,内盛有 40°C左右的温水作为工作流体。

转盘: 由南京大学傅豪(2011级)、孙世玮(2011级)、王昱(2013级)自主设计研发。转速可调(0-2.0 rad·s⁻¹),转盘上可搭载水槽以及各种电子器件。

2.2 实验可行性/相似性分性

量纲分析是流体动力学与流体热力学中一种常用方法。不同的行星天体间同一物理量的 量级往往差异很大,不同的模式、模型的尺度更是天造地设。为了比较不同尺度模型之间的 流体特征,为了能将模型得到的结论应用于真实大气中,除了要满足几何相似外,二者间的 动力相似也是很有必要的。基于量纲分析的方法,常利用无量纲数来描述和比较不同流体的 动力特征。[8]

在我们的转盘实验中,工作流体所处的水槽呈同心圆形状,而真实大气中的斜压波的水 平活动范围也可视为一同心圆。地球表面为曲面,而我们的实验水槽底层为平面,实际处理 斜压波动时,可以地球球面近似为平面(即忽略β效应)^[9]。因而几何相似得到满足。

下面利用无量纲数,简要说明动力相似的推导过程。(正文中常见物理量说明可见附录 [一])

旋转参考系中流体的基本运动方程为:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - 2\Omega\vec{k}\times\vec{V} + \gamma\nabla^{2}\vec{V}$$
(1)

将方程 2.1 无量纲化,得到旋转流体无量纲形式的运动方程:

$$Ro\left[\frac{L}{UT}\frac{\partial \overline{V'}}{\partial t'} + (\overline{V'} \cdot \nabla')\overline{V'}\right]$$

= $-\nabla'\left[Ro^{-1}\left(\frac{p'}{\rho'} - \frac{1}{2}r'^2 + \frac{1}{Fr}z'\right)\right] - 2\vec{k} \times \overline{V'} + Ek\nabla'^2\overline{V'}$ (2)

2.2 式中, Fr 为旋转流体的特征弗劳德数, $Fr = \frac{\Omega^2 L}{g}$, 为特征惯性力与重力之比;

Ro 为特征罗斯贝数, $Ro = \frac{U}{\Omega L}$, 为特征惯性力与特征偏向力之比;

Ek 为特征埃克曼数, $Ek = \frac{\gamma}{\alpha l^2}$, 为特征黏性力与特征偏向力之比。

在真实地球中,对于大气大尺度长波运动,各物理量的特征值为:

 $\Omega = 10^{-4} rad/s$, $L = 10^{6} m$, $g = 10 m/s^{2}$, U = 10 m/s, $\gamma = 10^{-5} kg/m \cdot s$ 计算得地球的无量纲数:

 $Ek = 10^{-13}$

 $Fr = 10^{-3}$, Ro = 0.1,

它们总体上反映了大尺度大气运动的运动惯性小于偏向力和重力、黏性力可忽略的特征。 对于我们的实验,带入同样参数的特征值(其余量都很容易求得,关于特征速度的取值, 可见附录):

 $\Omega = 1rad/s$, L = 0.1m, $g = 10m/s^2$, $U = 10^{-3}m/s$, $\gamma = 10^{-3}kg/m \cdot s$ 可计算得到:

$$Fr = 10^{-2}$$
, $Ro = 10^{-2}$, $Ek = 10^{-1}$

与真实大气相比,尽管有量级上的出入,但它们同样反映出:运动惯性及粘性力影响较小,地转偏向力和重力有较大的影响。同时基于特征罗斯贝数*Ro*的量级,无论是真实行星大气还是我们的实验流体,均满足准地转平衡运动的条件^[10]。因而动力相似基本满足。

综上,利用转盘实验来反演斜压波在理论上是可行的。

2.3 实验过程简介

按照实验要求,为了在水槽中模拟经向温差,在实验准备阶段提前备好冰块和温水,用 冷水罐盛放冰水混合物放置水槽中央作为冷源,而在水槽其他部分填充温度 40℃左右的温 水来制造温差。由图 6 右上角所示,水槽中工作流体的内外温差一般在 10℃左右(除特殊 情况外,不更改这一温差数值)。

此外,实验开始前还需要配置 PIV 粒子。我们选择将聚苯乙烯粒子溶于表面活性剂, 再将其与水混合配置成浊液,在转盘启动前将浊液均匀滴加在热水中,并将拍摄装置固定在 转盘正上方,拍摄得到的视频图像资料将用于后期依靠'PIVlab'程序的流场反演。

实验开始前,设置一固定转盘转速,启动转盘,让水槽随转盘开始转动(水槽中点、冷源中点和转盘的轴线重合)。经过一定较长时间(一般为 8min 左右)后,温水区的工作流体将不再具有惯性滞后(即水槽底部附近的流体与水槽间无相对运动),斜压波也已经充分发展并保持稳定。此时开启激光器并启动拍摄装置(暂时采用智能手机)录制 PIV 粒子的视频资料。随后可向流体中滴加红墨水,在蓝激光的作用下,红墨水呈现出的流体运动轨迹十分清晰漂亮,可用此方法来直观判断波的形状和个数。

实验结束后,先后关闭转盘、激光器和拍摄装置,并清理实验现场。

3 基于 Eady 模型的理论分析

在正式开始实验前,我们希望首先能从理论方面入手,依靠公式和计算,来描述斜压波的一些波动特征(波长、相速度等)。这也可以作为我们后续实验结果的比对。

描述和处理斜压不稳定问题的经典理论有很多,比较有名的有"两层模型"、瑞利方法、 Eady 模型、中性模型^[11]等等。我们综合比较了各种模型的优劣和适用条件,最终选择了 Eady 模型^[9]作为我们的理论研究对象。

3.1 转盘实验模型

我们首先将转盘实验中的水槽抽象为一个简化模型,以方便接下来同 Eady 模型做比较。



图 7: 简化的水槽模型

如图 7 所示,为一同心圆柱体系统。中心为一冷源,其余部分内充满了温热的工作流体。 以该系统为参考系建立自然坐标系, x 轴沿逆时针方向平行于侧壁, y 轴垂直于 x 方向 指向圆柱轴心, z 轴垂直于 x-y 平面指向上。x、y、z 可分别类比于地球的纬向、经向和垂向。

系统本身围绕 z 轴还有自转速度 Ω。因此在旋转参考系中,单位质量流体质点受到惯性 力为 2* Ω,类似于地球上物体所受的科氏力。

设 u、v、w 分别为流体质点沿 x、y、z 方向的速度。在不考虑温度等影响的理想状态下, u、v、w 均为 0,即流体与系统间无相对运动。

实际系统为外热内冷,即存在 y 方向的温度梯度。则在底层 z=0 时,流体仍然随系统一起运动,因而速度 u=0; z>0 时,由热成风原理 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} lnT$ 可得,流速 u 将随高度逐渐增加。与此同时,由于温度、科氏力等影响,流体在 y、z 方向也将出现扰动速度。

3.2 Eady 模型的基本假设

Eady 在处理和建立斜压大气模型时,做出了四点假设:

- ① 基本流体为纯斜压流体,且流速随高度呈线性变化,即 $\bar{u}(z) = \lambda z$,其中 λ 为常数;
- ② 忽略 β 效应,即科氏参数 f 为常数;
- ③ 流体密度 p 及浮力频率 N 不随高度变化;
- ④ 刚性边界条件,即下边界处 z=0 和上边界处 z=H 时,扰动垂直速度w'=0。

之所以选择 Eady 模型作为我们的理论研究对象,是因为这四点前提假设与我们的实验 模型由许多不谋而合的地方。下面将一一论证。

① 纯斜压基本流ū(z),且ū随高度线性变化

z=0时,基流与水槽无相对运动,即ū(z=0)=0.不考虑温度等影响的理想条件下,同一x轴上流体均沿纬向(x方向)运动,因而ū不存在纬向切变。由附录三可得,水槽中的纬向基流速度是一个非常小的量,因此在局部地区,对于水槽中间和外围处的流体,其绕心的纬向运动可近似为直线运动,因而ū的经向切变可以忽略。至此满足纯斜压基本流条件。

利用数学物理方法的定解问题^[12],可推导得到最终理想状态下的水槽流体温度将沿经向呈线性变化。(详细推导过程可见附录[五])

根据热成风近似关系 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{fT_0} \frac{\partial}{\partial y} T$,基本气流 \bar{u} 也将随高度呈线性变化。

综上,实验模型满足假设①。

② 忽略 β 效应

即要证明科氏参数 f 为常数。根据科氏力的定义,以一定角速度自转的水槽,其内部流体的科氏参数恒为 f=2 Ω ,又自转角速度 Ω 恒定,故科氏参数为常数。故假设②满足。

③ 流体密度及浮力频率不随高度发生变化

实验的工作流体为水,内外温差范围很小,温差所引起的密度变化十分微弱,可认为工 作流体密度ρ恒定。

浮力频率是在稳定温度层结中流体质点受到扰动后在垂直方向上移动,在重力与浮力的 共同作用下在其平衡位置附近做振动的振荡频率。海洋学中采用公式 $N = \sqrt{\frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}}$ 计算浮力 频率^[13]。其中g为重力加速度, ρ 为流体密度, $\partial \rho / \partial z$ 为位势密度(位势密度为一定压力下 的流体质点绝热的移动到标准大气压下时,其对应的密度值)对垂直方向坐标z求导。实验 中g, ρ 均为常数,由于密度均一,故 $\partial \rho / \partial z=0$,进而 N=0。故在实验中不存在浮力振荡, 其值恒为 0。

综上,实验模型满足假设③。

④ 刚性边界条件

实验中水槽下边界为刚壁,满足刚性边界条件假设;上边界为自由表面,类似海洋模式中的刚盖近似模型,液面上下起伏即扰动垂直速度可以忽略。因而认为上边界同样满足刚性边界条件。故假设④满足。

3.3 Eady 公式推导

在确定了四个基本假设后,正式开始 Eady 模型斜压不稳定的公式推导,主要目的是得 到斜压波的波数及波长特征。

由于推导过程较长,详细请见附录[六]。基本思路是从流体的五个基本控制方程出发 (两个 NS 方程、一个静力平衡方程、一个连续方程和一个质量守恒方程),并将流场中的 物理量分解为平均部分与扰动部分。经过一定的转换,最终用流函数(即扰动压强)来代替 流体的速度与涡度。得到关于扰动压强的方程,设标准波形解,并利用上下边界条件分别得 到两个方程。基于这两个方程,以及波动不稳定增长的位相虚数条件,最终可得到斜压波的 波数 k 特征为:

$$k < \frac{2.3994}{L_0}$$
 (3)

其中 L_0 为 Rossby 变形半径,定义为 $L_0 = \frac{N}{f}H$ 。若流体的层结性可以忽略,则还可定义

为 $L_0 = \frac{\sqrt{gH}}{f}$ 。

由推导还可得到,当不稳定增长速率最大时,最大不稳定波的波数为:

$$k = \frac{1.6062}{L_0}$$
(4)

则最大不稳定波的波长为: $L = \frac{2\pi}{k} = 3.9118 \cdot L_0$ (5)

以地球中纬度大气为例,45°附近的罗斯贝变形半径 $L_0 \approx 1000 km$,则斜压波动的波长 $L \approx 4000 km$ 。又中纬度地球的周长约为2·10⁷m。则可估算出绕极一周共有五个波动,与 实际地球大气相符。

Eady 模型得到的结果说明斜压不稳定波受到罗斯贝变形半径的影响,而罗斯贝变形半径与自转速度 f 和流体高度 H 等有关。

4 实验结果与分析

正式开始转盘实验。基于控制变量的原则,我们仅改变转盘转速而控制其他如流体深度、 温度等物理因素不变,做了一系列不同自转周期的斜压波模拟实验。其中在尺度方面,水槽 的内半径 a=5cm,外半径 b=11cm,即流体在这 6cm 宽的同心圆范围内活动。此外,流体的 深度一律控制在 H=11cm,内外温差则控制在 $\Delta T = 10$ °C左右。

为了便于比较,我们还做了内外温差为0以及无自转速度这两种极端情形下的实验。

4.1 对照实验现象与分析

为了更进一步理解系统自转与内外温差在斜压波中的作用,我们特意做了两组比较特殊 和极端的实验——一组有自转无温差,另一组无自转有温差。

在有自转无温差的水槽中,理想状态下最终流体将与水槽一起运动,所呈现出来的流线 应该不会有太多才对。实际的左图确是这么密布的流线配置。这可能与实际的转盘抖动、镜 头抖动、PIV 粒子本身的运动等等原因有关。

右图则相对来说规则许多。在有温差无自转的水槽中,高层的流体呈现逆时针的绕极运动。



图 8: 左图为有自转(T=6.3S)、无温差的流场图, 右图为有温差(ΔT = 10°C)、无自转的流场图

这两组实验恰恰说明了科氏力(系统自转)和斜压性(南北温差)对于斜压波形成的重 要性,单单一个要素是无法产生波动的——前者只是使得流体质点杂乱无章,后者只会形成 纬向环流而无明显波动(或者说只有一波)。正是在科氏力和斜压性这两个要素的结合下, 促成了 4.2 中所展示的各不相同的斜压波动。

4.2 斜压波实验现象

下面来看看一系列不同自转周期 T 的实验现象。我们共做了 6 组实验。需要特别指出 的是,我们在实验中是先利用 PIV 粒子观测,然后滴加墨水进行观测。因此 PIV 的反演图 与墨水的示踪图并非同一时刻观测到的流场图像。当然实际由于纬向气流速度一般不大,不 同时刻的波动位相一般也相差不大。







右图的墨水图未表现出突出的涡旋结构。之所以呈现出这种杂乱的流场图像,应该是因为自转角速度较小,使得流体质点所受的科氏力也很小,科氏力与梯度力之间的二力平衡难以维持。由拍摄的视频可知流场整体呈逆时针方向运动,这与左图反演得到的流线图轨迹较为吻合。



图 10: T=6.3S 时的流场图。左图为 PIV 反演的流线图, 右图为墨水示踪图

转盘自转周期 6.3S 时, 左图反演得到的流线图表现为非常明显的三波结构。与周期 10s 时类似, 上角处的粒子辨识度依然不是很高。但是与周期 10s 不同的是, 墨水图的示踪表现 要漂亮很多, 表现为 3 个明显的波峰(以及波峰之间的波谷), 伴随的是 3 个涡度最大值(最小值)中心, 与左图的流线图相一致。





图 11: T=5S 时的流场图。左图为 PIV 反演的流线图,右图为 PIV 反演的涡度图。 下图为墨水示踪图

转盘自转周期 5S 时, 左图的流线图表现不是很理想, 流线不太连续, 分布也有点杂乱。 相比之下右图的涡度分布图就显著得多, 大致能看到 5 个明显得正涡度中心, 彼此之间呈正 五边形分布。下图的墨水示踪图呈现一规整的"五角星"型, 非常得清晰明显, 也佐证了这 种状态下的五波分布。



图 12: T=4S 时的流场图。左图为 PIV 反演的流线图,右图为 PIV 反演的涡度图。 下图为墨水示踪图

转盘自转周期 4S 时,左图反演的流线图依然有不明显的地方,但能看出转盘上方的两 个较强涡旋。右图为反演的涡度图,可看见下方涡度极值中心分布较多而琐碎。下图的墨水 图则非常明显,为非常堆成的四角星型,对应四个波。



图 13: T=3.6S 时的流场图。左图为 PIV 反演的流线图,右图为 PIV 反演的涡度图。 下图为墨水示踪图

转盘自转周期 3.6s 时,左图的流线图比较糟糕。从右图的涡度分布可以看出五个正涡度中心呈正五边形分布。下图的墨水示踪佐证了这一观点,为五波分布的结果。

仅从这些反演图像的质量上说,明显墨水示踪图优于 PIV 涡度图优于 PIV 流线图。这 也证明红墨水蓝激光呈像是一种有价值和意义的方法。

为什么 PIV 得到的流线图会如此糟糕(尤其是在高转速的时候)?猜测可能有两点原因:一是已经反复提到的光源照射不足,偏暗的那一侧能够被镜头捕获到的 PIV 粒子远不如另外两侧;二是因为在转速较快的时候(三四秒就转了一圈),转盘本身会有一定的抖动,这种抖动对于能够稳定存在的斜压波来说当然不会有太大影响(毕竟墨水示踪的结果都很不错),但是对于依靠几帧的时间间隔的 PIV 粒子反演流线图确是致命的打击。因此反演得到的流线场不是很理想。

4.3 结果分析与比较

综合 4.2 的现象, 绘制表 1:

	自转周期T/S	10	6.3	5	4	3.6	
实验波动个数 m 1 3 5 4 5	实验波动个数 m	1	3	5	4	5	

表 1: 实验所得不同自转周期下斜压波的波动个数

结合 3.3 的公式推导结果
$$\mathbf{k} = \frac{1.6062}{L_0}$$
. 若在稳定层结中取 $L_0 = \frac{\sqrt{gH}}{f}$

在我们的实验中,科氏参数f = $2\Omega = \frac{4\pi}{T}$,H 统一取为 0.11m。又绕水槽一周的周长大约是 $L_c = 0.6$ m。

则计算所得的理论斜压波波动个数为

$$m' = L_c \frac{k}{2\pi} = \frac{3.2124L_c}{T\sqrt{gH}}$$
(6)

代入我们的实验参数得理论斜压波动个数与自转周期 T 的关系为:

$$m' \approx \frac{1.84}{T} \tag{7}$$

这显然与我们的表1结果有较大出入。猜测可能是因为流体的层结性不能忽略,在L₀出现了问题。查阅相关文献[14]可得,实际计算L₀时可采用约化重力g'来代替 g 进行计算。约化重力定义为:

$$g' = g \frac{\Delta \rho}{\rho} \tag{8}$$

查阅书籍[15]可得,水在45℃(水槽下边界处的温度)和15℃(水面与空气交界处的温度)时密度分别为0.990和0.999(单位均为g/cm³)。则计算得到g'≈0.009g,再代入上式,得到理论的斜压波动个数为

$$m' \approx \frac{19.4}{T} \tag{9}$$

再代入我们实验所用的自转周期,制得到表 2:

自转周期T/S	10	6.3	5	4	3.6
实验波动个数 m	1	3	5	4	5
理论波动个数 m'	1.94	3.08	3.88	4.85	5.39

表 2: 不同自转周期下,理论与实验波动个数比较

理论计算得到的波动个数总是会有小数部分,实际的大气波动或是我们的实验波动不会存在这种"小数波"。(比如实验自转周期取 6s 或 7s,波动个数都应该为 3。)所以,如果 m 与 m'相差不到 1.0,即视为实验符合理论。

比较表 2 可知,在 T 取 10、6.3、4、3.6 的时候,实验结果都比较符合理论(尤其是 T 取 6.3 和 4 的时候)。唯独 T=5s 时实验与理论出入较大,所以我们单独复查了这组实验视频 资料,发现它有一明显特征。



图 14: 时间间隔 50s 的 T=5s 的流场图(左图为时间在前)

(10)

如图 14 所示,经过 50s 时间,斜压波就已经移动了一个位相(距离为 $0.2L_c = 0.12m$), 计算得到这一逆时针运动的速度约等于 $2.4 \cdot 10^{-3}$ m/s,约是附录[四]计算结果的 3 倍,也明显快于其他组实验。

造成这种现象的可能原因是内外温差并没有控制得当。T=5s 组实验的流体温差ΔT应该 超过了其他组别的 10°C,导致有更大的经向温度梯度。而温度梯度的增加会带来更强的热 成风,最终使得流体的逆时针运动速度明显快于其他组别。

同时,因为有更大的温差,T=5s 组实验的流体密度差异也会更大,由此计算得到的约 化重力更小,因而T·m′的数值将大于 19.4,故理论上会具有更大的波动个数。这也解释了 T=5s 组实验的波动个数异常的原因。

总的来说,尽管有小插曲,实验结果还是能够很好地与理论结果对应的。它们共同反映出:当系统尺度固定(*L_c*一定),流体层结固定(g'一定)、高度不变(H一定)的时候,斜压波动的个数,与系统自转周期成一定的反比关系/与系统的自转角速度成正比关系。比例系数即与*L_c、g'、H*有关。反映成公式为:

$$m'T = \frac{3.2124L_c}{\sqrt{g'H}}$$

或者

$$\mathbf{m}' = \frac{0.5115L_c}{\sqrt{g'H}}\Omega$$

4.4 误差分析

作为水槽实验,自然不可能完美满足 Eady 模型理论推导的种种条件和假设。本节主要 讨论实际情况不满足理论假设的部分,或者实验中需要改进的操作,来分析实验误差的可能 来源。

4.4.1 水槽内流体的温度控制与测量

我们在前文的叙述中都有意地回避温度这一参数。上文中的公式(3)(6)(7)(10)也都没有 直接出现温度项(当然温度还是会影响到约化重力、罗斯贝变形半径的变化)。事实上流体 的温度控制与温度观测是我们实验目前面临的两大难题,也是以后改进实验的主要方向。

在迄今为止我们所做的实验中,并不能严格控制冷源和热水的温差。每次实验都是用冰水混合物和温热水来大致组成 10°C左右的温差。这样做会带来两大问题,一是在实验过程中冰水与温热水的本身温度都是在变化的,这就造成了内外温差并不完全恒定;二是内外温差无法像自转周期那样严格控制和改变,也导致我们无法系统地针对温度来做实验。在后续实验中,我们可对实验装置进行改进,实现实验过程中保持温差恒定且可控,以此来减小误差。

而温度测量这块也是一大难题。目前我们使用的是热成像仪来观测流体温度。





如图 15 所示, 左图可以说是我们拍摄到的一幅最好的温度图像(即使如此也只能看出 个大概, 很多时候都是如右图所示的"一片红"。这主要是因为水槽流体的体量小,除了中 心冷水罐的温度外,周围流体的温度差异一般很小,导致很难被热成像仪分辨出。传统的水 槽实验方法一般都是使用温度探头^[16]来测量, 然而由于水槽流体的体量较小,经过我们的 尝试,与流体相接触的温度探头会给流体运动带来一定干扰,对流场的反演是致命的。合适 的温度测量方法还有待进一步探寻。

4.4.2 上边界是否满足刚性无穿透条件

Eady 模型假设上下边界严格满足无穿透的刚壁条件。在实验中,水槽下边界为刚性壁, 垂直方向上w'|_{z=0} = 0,而上边界为自由表面,液体表面会发生振动,不严格满足刚性无穿 透的条件;加上仪器较为简单,旋转过程中机器自身的振动使得液面上的振动不规则,难以 用表达式表述。之前的理论推导中,考虑到大气压>>液体压力,我们认为上边界液面上的扰 动可忽略,于是采用刚盖近似,认为上边界同样满足垂直方向上w'|_{z=H} = 0。

实际操作中可观察到液体表面的无规则振动较为明显,即w'|_{z=H} = $f'(x, y, z, t) \neq 0$,不可忽略。若要更好地与实验现象相符,应该在求解微分方程式改变代入的边界条件,再推导理论最大波数与转速的关系;或者在实验中,在热水上表面加上刚盖,使其符合"上边界满足无穿透条件"的假设。

4.4.3 水槽内流体是否可忽略垂直方向上的温度层结

水槽中层结会随着冷水下沉、暖水上升的现象自然产生,由于内外温差小(1℃左右), 在之前的推导中,我们认为垂直方向上各层温度近似相等,得到"背景场流速随高度呈线性 变化"的结论,而后来在修正结果的时候,我们又认为各层温度(密度)不完全相等,即流 体具有层结性,导致前后矛盾。

除了这些以外,诸如转盘的震动、摄像头的晃动等等因素也会干扰到我们的实验。

5 总结

尽管实验现象令人满意,但还是有很多遗憾的地方。目前我们的实验仅就自转速度这一 个量进行改变和分析,未来还可以控制自转速度不变,改变流体高度来进行实验,由公式(10) 可猜测,流体高度越高,波动个数也就越少。我们的水槽实验还有很大的改进和操作空间。

回到开头的木星大气波动问题,利用我们在实验中的一些发现和结论,以下是我们的猜 想性回答。

为什么这些八边形/五边形分布的涡旋作为一个整体的移动非常缓慢?

在本文的附录[四]和 4.3 小节中,也有分析到流体整体的逆时针移动,这一移动速度 10⁻³m/s左右(换算成转动周期的话约为 300s),而水槽的自转周期为 5s,在这种小尺度的 水槽中,可以说是比较缓慢的移速。

在我们的分析中,这一移动速度与温度梯度直接相关。木星极地附近的大气波动移速缓 慢,可能是因为该纬度附近的南北温度梯度较小。

为什么这些涡旋没有合并而能彼此独立存在?

这些涡旋的生成原因暂时还没有文献也欠缺资料讨论。我们只能假设这些涡旋是伴随着 斜压不稳定而生成。(由 4.3 节涡度图可知,在斜压波动的波峰是正涡度极值中心,往往伴随着涡旋出现)。

实验中,如果内外温差和自转速度维持不变的话,斜压波就可以维持较长时间,波动个 数也不太会发生变化。

那为什么这些涡旋没有向中心靠拢呢?毕竟木星南北极中心也有一个气旋,其低压的特 性应该会导致周围大气向中心辐合。

在我们的水槽实验中,中心并不是涡旋而是一圈侧壁,阻挡了流体的向极运动。我们猜 测木星南北极中心涡旋的四周是否也有大气成分类似一层侧壁,限制了周围涡旋只做纬向移 动,而不会向中心靠拢。

为什么南北极的涡旋个数不一样?

由公式(10)可知,影响波动个数(涡旋个数)的因素有很多,比如南北极附近温度梯度的 差异/大气高度的差异等等都有可能使涡旋个数发生改变。

基于朱诺号观测资料,一些学者研究发现:木星的重力场分布是南北不对称的。^[17]在 木星南极附近有正的重力加速度扰动,北极附近有负的重力加速度扰动。这意味着南极重力 加速度略大于北极。在公式(10)中,g越大(g'越大)的话,也就意味着波动个数越少。从这一 角度可能也可以解释南北极涡旋个数不一致。

以上就是我们的一些关于木星大气的简单猜想。当然,行星大气的状况肯定比我们的水 槽流体要复杂得多,实际木星大气波动的状况也远非我们想得这么简单。我们做水槽实验的 初衷,只是想理解和研究斜压波本身。如果能用我们的实验经验与结论,来为解释实际天体 中的大气现象提供一种思考的角度和可能的答案,就再好不过了。相关木星大气波动的解析, 还需要更多的观测资料与更进一步的理论研究。

参考文献

- James R. Holton. An Introduction to Dynamic Meteorology (4th Edition). Elsevier Academic Press, 2004: 228-229
- [2] Hoskins, B.J., McIntyre, M.E. and Robertson, A.W.. On the Use and Significance of Isentropic Potential Vorticity Maps. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 111, 1985: 877-946.
- [3] Baines, K.H. et al. Saturn's north polar cyclone and hexagon at depth revealed by Cassini / VIMS. Planetary and Space Science 57, 2009: 1671-1681
- [4] Adriani, A. et al. Clusters of cyclones encircling Jupiter's poles. Nature 555, 2018: 216-219
- [5] Zappa, G., Lucarini, V., Navarra, A.. Baroclinic stationary waves in aquaplanet models. Journal of the Atmospheric Sciences 68, 2011: 1023-1040

- [6] Masoud Rostami, Vladimir Zeitlin, Aymeric Spiga. On the dynamical nature of Saturn's North Polar hexagon. Icarus 297, 2017: 59-70
- [7] Boubnov, B.M., Golitsyn, G.S.. Convection in Rotating Fluids. Springer Science + Business Media Dordrecht, 1995: 93-137
- [8] Y. Nakayama, R.F. Boucher. Introduction to Fluid Mechanics. Butterworth Heinemann, 2000: 171-180
- [9] Eady, E.T.. Long Waves and Cyclone Waves. Tellus 1, 1949: 33-52
- [10] James R. Holton. An Introduction to Dynamic Meteorology (4th Edition). Elsevier Academic Press, 2004: 140-167
- [11] James R. Holton. An Introduction to Dynamic Meteorology (4th Edition). Elsevier Academic Press, 2004: 230-260
- [12] Liang Kunmiao. Methods of Mathematical Physics (4th Edition). Higher Education Press, 2010: 145-188 (in Chinese)
- [13] Bray, N.A., Fofonoff, N.P., Available potential energy for MODE eddies. Journal of Physical Oceanography 11, 1981: 30 – 47
- [14] Payam, A. et al. Boundary-layer-separation-driven vortex shedding beneath internal solitary waves of depression. Journal of Fluid Mechanics 690, 2012: 321-344
- [15] Chief D. R. Lide. CRC Handbook of Chemistry and Physics,87th Edition. 2005: 6_2-6_7
- [16] Wei Gang et al. An experimental study on three-dimensional temperature structures of baroclinic waves in a rotating fluid subject to a negative radial temperature gradient. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics 26, 1994: 608-615 (in Chinese)
- [17] less, L. et al. Measurement of Jupiter's asymmetric gravity field. Nature 555, 2018: 220-222.

特别致谢

感谢南京大学宋金杰老师对我们的悉心指导! 感谢(2011级)傅豪学长在实验中给我们提供的帮助和引导! 感谢南京大学地球物理流体力学学生实验室给我们营造的良好实验环境! 感谢南京大学创新计划给予我们实验的资金支持!

附录

附录[一] 物理量说明

一些正文中经常出现的物理量说明:

物理量字符	含义	物理量字符	含义
\vec{V}	流体质点速度	u	流体纬向速度
v	流体经向速度	w	流体垂向速度
Ω	系统自转角速度	Т	系统自转周期
g	重力加速度	f	科氏参数
ΔΤ	系统内外温差	Н	流体深度/高度
γ	粘性系数	Р	气压/压力
ρ	流体密度	k	波数

L _c	绕极一周的系统周	m	绕极一周的波动个
	长		数

Table 1. 物理量与说明

附录[二] PIV(Particle image velocimetry)方法简介

PIV 法又称粒子图像测速法,是七十年代末发展起来的一种瞬态、多点、无接触式的激光流体力学测速方法。PIV 技术具有许多优点,除向流场散布示踪粒子外,所有测量装置不介入流场,具有很高的测量精度,是现在流体力学测量研究中的重要手段。

PIV 法的速度测量依赖于散布在流场中的示踪粒子(即 PIV 粒子),通过测量示踪粒子 在已知很短时间间隔内的位移来间接地测量流场的瞬态速度分布。示踪粒子的制取,用聚苯 乙烯粒子先溶在表面活性剂中,然后加水混合均匀。表面活性剂一边是亲水端,一边是疏水 端,疏水端结合粒子,能让粒子在溶液中混合均匀,然后利用粒子的散射打激光看清粒子分 布。

PIV 粒子的反演工具有很多种,我们所用的是由 William Thielicke 博士和 Eize J. Stamhuis 教授共同开发的 MATLAB 开源程序——数字粒子图像测速仪 'PIVlab'程序。在得到 PIV 粒子的视频资料后,每隔 3 帧截取图片。选取图像比较清晰的连续两张或多张截图,利 用'PIVlab'程序来反演速度场与涡度场。'PIVlab'反演的大致步骤有,选取感兴趣的位置, 用 mask 将中间冰块遮盖,防止产生不必要的误差,分析图片,得到原始速度场,剔除野点, 校准距离(用内径 50mm)与时间差(相邻图片时间差为 3 帧),画出流线图,并导出速度 场 uv 与涡度场 vorticity 图像。

附录[三] 红墨水遇蓝激光呈像原因分析

实话实说, 红墨水蓝激光呈像起因于我们实验中的一次偶然操作。当我们把高功率蓝激 光打在滴有红墨水的工作流体的那一刻, 立刻就被其呈现出的绚丽图像所折服。凭借着直观 便捷等特点, 红墨水蓝激光呈像法从此被我们广泛用于水槽实验中。

究其原理,我们查阅了一些文献以及咨询了一些老师,发现并没有明确的结论和解释。 基于一些老师的看法和我们自己的理解,作出如下猜测:

猜测一: 红光与蓝光叠加(已否定)

根据光的叠加原理,透过墨水的红光与蓝激光混合显示品红光,与实验现象不符。且透明物体的颜色由其透过的色光决定,红墨水滴加进清水,理应只能透过红色,而对红光的补色(即蓝光)有着强吸收。而激光相干性很强,红墨水吸收蓝光后,激光中不可能有黄绿色光显现出来。从这个角度来讲,蓝激光照进红墨水应该显示较深的颜色。理论上来说,红墨水吸收蓝激光这个现象在实验中一定存在,而我们看到的现象可能是叠加了红墨水中某些成分在激光中的其他效应而造成的。

猜测二: 拉曼散射

拉曼散射是指一定频率的激光照射到样品表面时,物质中的分子吸收了部分能量,发生 不同方式和程度的振动,然后散射出较低频率的光。不同原子团振动的方式唯一,因此可产 生特定频率的散射光,照此原理,拉曼散射可用于鉴别物质分子的种类。我们猜测,墨水中 可能存在物质使得蓝光照射其表面后,能散射出黄绿色光。但由于拉曼散射在散射中占比很 小(通常为 0.1%),一般肉眼不可见,因此尚不能把此现象归因于拉曼散射。

猜测三:墨水中某些物质的荧光效应

荧光效应是指当高能量短波长光线射入某些物质时,物质中的电子吸收能量,从基态跃 迁至高能级;处在高能级的电子不稳定,会从高能级跃迁至低能级,从而释放出能量发出光。 红墨水中也可能存在某些能用蓝激光激发出荧光的物质,导致这种现象的产生。 猜测二和三还需要进一步验证,目前的可能可行方法是检验我们看到的光的偏振态。一 般来说,激光都是很好的偏振光,可以用偏光仪来测定我们看到的黄绿色光的偏振态。若为 偏振光,则很有可能是拉曼散射;若为非偏振光,则可能是因为粒子跃迁时释放出来的光无 规则;若为为自然光,则此现象很有可能由墨水中某些物质的荧光效应造成。

附录[四] 转盘实验中纬向基流的速度(波动整体的移动速度)

从理论上说,在一个内冷外热的同心圆型流体中(例如图7右图),若下边界处流体与 系统无相对运动,则根据热成风原理,上层的流体将具有沿逆时针方向的速度。这一速度就 是纬向基流速度ū。同时,从整体上看,这一纬向速度也可视为波动整体的(逆时针)移动 速度。

在量纲分析中,纬向基流速度也可视为大尺度大气的特征速度,一般取值为10m·s⁻¹. 那么在我们的转盘实验中,这一速度的特征值又是多少呢?我们从 T=6.3s 的波动的视频资 料中选取不同时刻,如 Figure 1 所示:



Figure 1. 时间间隔 1min 的流场图(左图为时间在前) 如 Figure 1 红色所示区域,在 1min 内移动的实际距离约为 5cm。 所以我们可取流体整体移动的特征速度为10⁻³*m*/s。

附录[五] 水槽中流体温度随经向呈线性分布的推导过程

若不考虑水槽中温度的垂直变化与纬向变化,令u(y,t)表示水槽中的流体温度变化。取



Figure 2. 俯视角度下的水槽模型

如 Figure 2 所示,以 0 为原点,同心圆圆心与原点所在直线为 y 轴,且指向圆心方向为 y 轴正向。假设内半径为 a,外半径为 b。

加入工作流体后,内壁初温度为T₁,外壁处温度为T₂,初始时刻工作流体的温度与外壁 处温度相同为T₂。则上述问题对应的泛定方程及定解条件为:

$$\begin{cases} u_t - a_0^2 u_{yy} = 0 \quad (a_0^2 = k/c\rho) \\ u|_{y=b-a} = T_1 \quad u|_{y=0} = T_2 \\ u|_{t=0} = T_2 \end{cases}$$
(5.1)

将非齐次边界条件化为齐次边界条件: 令u = w + v, 其中 $v = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b - a}y$ 则关于w的控制方程与定解条件为:

$$\begin{cases} w_t - a_0^2 w_{yy} = -(v_t - a_0^2 v_{yy}) = 0 \\ w|_{y=0} = 0 \quad w|_{y=b-a} = 0 \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = T_2 \end{cases}$$
(5.2)

则w(y,t)的通解为:

$$w(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2(b-a)} y \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4(b-a)^2} a_0^2 t}$$
(5.3)

根据初始条件确定Cn:

$$C_n = \frac{2}{b-a} \int_0^{b-a} (\sin \frac{(2n+1)\pi y}{2(b-a)} \cdot T_2) dy = \frac{4T_2}{(2n+1)\pi}$$
(5.4)

代入w(y,t)的通解,得到:

$$w(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T_2}{(2n+1)\pi} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2(b-a)} y \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2} a_0^2 t}$$
(5.5)

故u(y,t)的通解为:

$$u(y,t) = w(y,t) + v(y,t)$$

= $T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b-a}y + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T_2}{(2n+1)\pi} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{2(b-a)}y \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}a_0^2t}$ (5.6)

其中 $0 \le y \le b - a$.

经过以较长时间 t 后, $\forall n \ge 0$, $e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}a_0^2t} \to 0$

则 $u(y,t) \rightarrow T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b - a} y$ 。即最终流体温度分布将沿经向方向呈线性变化。证毕。

附录[六] Eady 模型斜压波动的波数特征推导过程

以系统内任一流体质点为研究对象,五个基本控制方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \qquad (x \ \bar{f} \text{ in NS } \bar{f} R^2)$$
(6.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (y \, \bar{\beta} \, \text{in NS} \, \bar{\beta} \, \mathbb{R})$$
(6.2)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$
 (垂直方向静力平衡) (6.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (\dot{E} \notin f R^2) \qquad (6.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad (\text{ff} \pm \theta^{\dagger} \pm \theta)$$
(6.5)

由小扰动法,将方程中的物理量分解为平均值与扰动值:

$$u = \overline{u(z)} + u'(x, y, z) \quad v = v'(x, y, z) \quad w = w'(x, y, z)$$

$$\rho = \overline{\rho(y, z)} + \rho'(x, y, z) \quad P = \overline{P(y, z)} + P'(x, y, z)$$

其中, 平均场(即背景场)满足:

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}$$
 (水平 x 方向背景场满足地转平衡, y 方向无背景气流) (6.6)

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial z} = -\overline{\rho}g$$
 (垂直方向满足静力平衡) (6.7)

联立两式消去压强项得
$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{g}{f\rho_0} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}$$
 (6.8)

联立式(6.1)(6.2)(6.3)得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - (\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad ({\rm ä} {\rm g} {\rm f} {\rm$$

其中,
$$\zeta = \zeta'(x, y, z)$$
 $\overline{\zeta} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = 0$
再次由小扰动法化, 简涡度方程得 $\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} - f \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$ (6.10)

可认为扰动速度近似满足地转平衡:

$$u' \cong -\frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial P'}{\partial y} \quad v' \cong \frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial P'}{\partial x} \tag{6.11}$$

流函数与扰动压强、涡度的关系:

$$\psi = \frac{P'}{\rho_0 f} \qquad \zeta' = \nabla_H^2 \psi = \frac{1}{\rho_0 f} \nabla_H^2 P'$$

由小扰动法,线性化方程(6.5)可得

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{u}{\partial x} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v' \frac{\partial \rho}{\partial y} + w' \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$
(6.12)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{u}{a} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v' \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y} - \frac{\rho_0 N^2 w'}{g} = 0, \quad \pm \Psi N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} \quad (N \text{ 5})$$
(6.13)

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}\frac{\partial P'}{\partial z} = -\rho'g \quad \rho' = -\frac{1}{g}\frac{\partial P'}{\partial z} \\ & \underline{\partial \rho}_{g} = \frac{f\rho_0}{g}\frac{d\bar{u}}{dz} \quad (\mathrm{bt}\mathfrak{R}(6.8) \,\overline{\eta}\mathfrak{P}) \quad v' = \frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial P'}{\partial x} \quad (\mathrm{bt}\mathfrak{R}(6.11) \,\overline{\eta}\mathfrak{P}) \end{aligned}$$

将上述结果代入(6.13)得到垂直方向的扰动速度:

$$w' = \frac{g}{\rho_0 N^2} \left[-\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0 f} \frac{f \rho_0}{g} \frac{d \overline{u}}{d z} \frac{\partial P'}{\partial x} \right]$$

$$w' = -\frac{1}{\rho_0 N^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{d \overline{u}}{d z} \frac{\partial P'}{\partial x} \right]$$
(6.14)

代入式(6.10)可得压强扰动方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla_{H}^{2}P' + \frac{f^{2}}{N^{2}}\frac{\partial^{2}P'}{\partial z^{2}}\right) = 0$$
(6.15)

假设 P 满足标准模,并假设波动只沿 x 方向传播:

.

$$P' = \hat{P}(z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.16}$$

代入方程(6.15)可得本征值方程:

$$\frac{d^{2}\hat{P}}{dz^{2}} = \frac{N^{2}}{f^{2}}k^{2}\cdot\hat{P} = \mu^{2}\hat{P}, \quad \pm \psi = \frac{N}{f}k$$
(6.17)

可得本征值问题的解:
$$\hat{P} = A \cosh \mu z + B \sinh \mu z$$
 (6.18)

在考虑边界条件时,下边界刚壁,即垂直方向上扰动速度为0;上边界为自由液体表面, 参考海洋模型中的刚盖近似,在忽略液面振动的情况下,也可认为上边界刚壁,垂直方向上 扰动速度为0。

由边界条件z=0, z=H, w'=0可得:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t \partial x} - \frac{u_0}{H} \frac{\partial P'}{\partial x} = 0 \qquad (z = 0, w' = 0) \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t \partial x} - \frac{u_0}{H} \frac{\partial P'}{\partial x} + u_0 \frac{\partial^2 P'}{\partial x \partial z} = 0 \quad (z = H, w' = 0) \quad (6.20)$$

将两式分别代入(6.18),得到关于 A、B 的二元一次齐次线性方程组。要存在非零解,则系数行列式为 0,可得相速度:

$$C = \frac{\lambda H}{2} \pm \frac{\lambda H}{2} \left[(1 - \frac{2}{\mu H} \tanh \frac{\mu H}{2}) (1 - \frac{2}{\mu H} \coth \frac{\mu H}{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$C = C_r + iC_i$$
(6.21)

若要出现不稳定增长,则虚部系数不为零,即令根号下的乘积值为负:

$$(1 - \frac{2}{\mu H} \tanh \frac{\mu H}{2})(1 - \frac{2}{\mu H} \coth \frac{\mu H}{2}) < 0$$
(6.22)
解得 $\mu H < 2.3994$, 即 $\frac{N}{f} H < \frac{2.3994}{k}$
定义 $L_0 = \frac{N}{f} H$ 为 Rossby 变形半径,则波数 k 需满足要求 $k < \frac{2.3994}{L_0}$
又不稳定增长率 σ_i 为:

$$kc_{i} = \frac{k\lambda H}{2} \left[(1 - \frac{2}{\mu H} \tan \frac{\mu H}{2}) (1 - \frac{\mu H}{2} \coth \frac{\mu H}{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$
(6.23)

当根号下的乘积取到最大值时,计算可得 μ H = 1.6062

则由(6.17)可得,最大不稳定波的波数 $k = 1.6062 \frac{f}{NH} = \frac{1.6062}{L_0}$

证毕。

Experiment and Research on Atmospheric Baroclinic Wave

You Feiyu

Junior, Nanjing University, School of Atmospheric Science, 210023 Li Yimeng Junior, Nanjing University, School of Atmospheric Sciences, 210023 Lai Yanhong Junior, Nanjing University, School of Atmospheric Sciences, 210023 Li Danyang Junior, Nanjing University, School of Atmospheric Sciences, 210023 Mentor: Song Jinjie

Associate Professor, Nanjing University, School of Atmospheric Sciences, 210023

Abstract The baroclinic wave is one of the most notable features of the middle and high latitudes atmosphere, and the Juno spacecraft has also captured a lot of information about the atmospheric fluctuations of Jupiter in the past two years. In order to understand and explore this large-scale atmospheric fluctuation, we adopt the method of hydrodynamic flume experiment and successfully obtain the baroclinic fluctuation of different wave patterns. Before experiment, we demonstrated the similarity between the experimental model and the Eady theoretical model, and deduced theoretically the result of baroclinic wave. During experiment, we used ink and laser to obtain wave image, and compared experiment results with theoretical ones. Finally, based on our conclusions, we try to answer some questions about Jupiter's atmosphere.

Key Words Baroclinic wave; Flume experiment; Fluid Mechanics; Atmospheric Science;